2026年新高考数学一卷逐题解析

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1 样本数据6,8,4,5,12的中位数为(　　)

A. 5　　B. 6　　C. 8　　D. 9

【答案】B

【解析】将数据从小到大排列为4,5,6,8,12,中间数为6,选　　B.

2 已知平面向量$\vec{a},\vec{b}$不共线,且$2\vec{a}+y\vec{b}=x\vec{a}-3\vec{b}$,则(　　)

A. $x=2,y=-3$　　B. $x=-2,y=3$

C. $x=2,y=3$　　D. $x=-2,y=-3$

【答案】A

【解析】因为$\vec{a},\vec{b}$不共线,所以对应系数相等,得$x=2,y=-3$,选　　A.

3 已知集合$A=\left\{\sin\frac{7\pi}{6},\cos\frac{5\pi}{3},\tan\frac{5\pi}{4}\right\},B=\left\{\frac{-\sqrt{3}}{2},\frac{-1}{2},1\right\}$,则$A\cap B=$(　　)

A. $\left\{\frac{-\sqrt{3}}{2},\frac{-1}{2}\right\}$　　B. $\left\{\frac{-\sqrt{3}}{2},1\right\}$

C. $\left\{\frac{-1}{2},1\right\}$　　D. $\left\{\frac{-\sqrt{3}}{2},\frac{-1}{2},1\right\}$

【答案】C

【解析】$\sin\frac{7\pi}{6}=\frac{-1}{2},\cos\frac{5\pi}{3}=\frac{1}{2},\tan\frac{5\pi}{4}=1$,所以$A=\left\{\frac{-1}{2},\frac{1}{2},1\right\}$,则$A\cap B=\left\{\frac{-1}{2},1\right\}$,选　　C.

4 曲线$y=5x+8\ln x$在点$(1,5)$处的切线方程为(　　)

A. $y=3x+2$　　B. $y=5x$　　C. $y=8x-3$　　D. $y=13x-8$

【答案】D

【解析】$y'=5+\frac{8}{x}$,当$x=1$时,$y'=13$,切线为$y-5=13(x-1)$,

即$y=13x-8$选　　D.

5 已知抛物线$C_1:y^2=2p_1x(p_1>0)$和$C_2:x^2=2p_2y(p_2>0)$均经过点$(4,8)$,则C_1的焦点与C_2的焦点之间的距离为(　　)

公众号·数学文化坊

A. 12　　B. $4\sqrt{5}$　　C. 6　　D. $\frac{\sqrt{65}}{2}$

【答案】D

【解析】由 $64=8p_1$ 得 $p_1=8$，由 $16=16p_2$ 得 $p_2=1$．因为 $y^2=2px$ 的焦点为 $\left(\frac{p}{2},0\right)$，$x^2=2py$ 的焦点为 $\left(0,\frac{p}{2}\right)$，所以两焦点为 $(4,0)$，$\left(0,\frac{1}{2}\right)$，距离为 $\sqrt{4^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{65}}{2}$，选　　D.

6　已知函数 $f(x)=\frac{x+2}{e^x+a}$ 的最大值为 1，则 $a=$（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1　　C. $\frac{3}{2}$　　D. 2

【答案】B

【解析】由选项知 $a>0$，分母恒正．最大值为 1，即 $x+2\leqslant e^x+a$ 对一切 x 成立，且能取等．设 $h(x)=x+2-e^x$，则 $h'(x)=1-e^x$，当 $x=0$ 时 $h(x)$ 最大，且 $h(0)=1$，所以 $a=1$，选　　B.

7　一百零八塔位于宁夏回族自治区青铜峡市，以其独特的建筑格局和深远的历史文化闻名遐迩．该塔群共有 108 座塔，依山势自上而下排成 12 行，将第 i 行中塔的座数记为 $a_i(i=1,2,\cdots,12)$，其中 $a_1=1$，$a_2=a_3=3$，$a_4=a_5=5$，且 $a_6,a_7,\cdots,a_{12}$ 是一个首项为 7，公差为 2 的等差数列．将 $a_1,a_2,\cdots,a_{12}$ 分为 6 组，每组 2 个数，使得每组的 2 个数之和可构成一个项数为 6 且公差为 $d(d>0)$ 的等差数列，则 $d=$（　　）

A. 2　　B. 4　　C. 6　　D. 8

【答案】B

【解析】$a_1=1$，$a_2=a_3=3$，$a_4=a_5=5$，$n\geqslant 6$ 时，

$a_n=7+(n-6)2=2n-5$

设新数列为 $\{b_n\}$，$\{b_n\}$ 为等差数列，$6b_1+\frac{6\times 5}{2}d=108$，$\therefore 2b_1+5d=36$，$b_1\in N$，$d\in N$，$b_1=8$，$d=4$，选　　B.

8　设 $U=\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_i\in\{-2,-1,1,2\},i=1,2,3\}$ 为空间中 64 个点构成的集合，点 $P(1,1,1)$，记样本空间 $\Omega=C_U\{P\}$。从 Ω 中随机取一个点，定义随机变量 X 如下：对 Ω 中的每个点 $A(x_1,x_2,x_3)$，令 $X(A)=x_1+x_2+x_3$，则 X 的数学期望为（　　）

公众号 · 数学文化坊

A. $-\frac{1}{21}$　　B. $-\frac{1}{63}$　　C. 0　　D. $\frac{1}{7}$

【答案】A

【解析】

方法一：对 U 中所有点求和，每个坐标中 $-2,-1,1,2$ 各出现 16 次，所以 $\sum_{A\in U} X(A)=3\times16\times(-2-1+1+2)=0$。

去掉 $P(1,1,1)$ 后，少掉的值为 $X(P)=3$，

于是 $\sum_{A\in\Omega} X(A)=0-3=-3$。又 $|\Omega|=63$，

故 $E(X)=-\frac{3}{63}=-\frac{1}{21}$，选　　A.

方法二：U 关于原点成中心对称，把点 A 与 $-A$ 配对，两个点的 X 值相反，全部抵消。现在只删去 $P(1,1,1)$，它的配对点 $-P(-1,-1,-1)$ 留下，

贡献为 $X(-P)=-3$，因此平均值立刻是 $E(X)=-\frac{3}{63}=-\frac{1}{21}$，选　　A.

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9　设 $z=3+2\mathrm{i}$，则（　　）

A. $\bar{z}=3-2\mathrm{i}$　　B. $|z|=5$　　C. $z^2=5+12\mathrm{i}$　　D. $\frac{z+3}{z-i}\in R$

【答案】ACD

【解析】由 $z=3+2\mathrm{i}$，得 $\bar{z}=3-2\mathrm{i}$，A 正确；$|z|=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}\neq5$，$B$ 错；$z^2=(3+2\mathrm{i})^2=9+12\mathrm{i}-4=5+12\mathrm{i}$，$C$ 正确；$\frac{z+3}{z-i}=\frac{6+2i}{3+i}=\frac{(6+2\mathrm{i})(3-\mathrm{i})}{10}=2\in R$，$D$ 正确；故选 ACD.

10　在空间中，A，B 为两个定点，动点 C 到直线 AB 的距离为 2，动点 D 到直线 AB 的距离为 1，若二面角 $C-AB-D$ 为 60°，则（　　）

A. $\angle CAD\geqslant60^\circ$

B. $CD\geqslant\sqrt{3}$

C. 当 $AB\perp CD$ 时，$CD\perp$ 平面 ABD

D. 当 $AB\perp$ 平面 ACD 时，$AC\perp AD$

【答案】BC

【解析】以直线 AB 为 x 轴，设 A 为原点，$C=(x_1,u_1,u_2)$，$D=(x_2,v_1,v_2)$，则

公众号：数学文化坊

$u_1{}^2+u_2{}^2=4$，$v_1{}^2+v_2{}^2=1$，$u_1v_1+u_2v_2=1$.

A：取 $x_1=x_2=t$，则 $\cos\angle CAD=\dfrac{t^2+1}{\sqrt{t^2+4}\sqrt{t^2+1}}\to 1$，

所以 $\angle CAD$ 可以小于 60°，A 错；

B：$CD^2=(x_1-x_2)^2+(u_1-v_1)^2+(u_2-v_2)^2=(x_1-x_2)^2+4+1-2=(x_1-x_2)^2+3\geqslant 3$，所以 $CD\geqslant\sqrt{3}$，B 正确；

C：若 $AB\perp CD$，则 $x_1=x_2$，此时直线 CD 与 AD 的方向向量数量积为 $(0,v_1-u_1,v_2-u_2)?(x_1,v_1,v_2)=(v_1^2+v_2^2)-(u_1v_1+u_2v_2)=1-1=0$，

又 $CD\perp AB$，所以 $CD\perp$ 平面 ABD，C 正确；

D：若 $AB\perp$ 平面 ACD，则 $x_1=x_2=0$，此时 $(u_1,u_2)?(v_1,v_2)=u_1v_1+u_2v_2=1\neq 0$，所以 $AC\perp AD$ 不成立，D 错；故选 BC.

11 已知圆 $C_1:(x+1)^2+y^2=1$，圆 $C_2:(x-1)^2+y^2=1$，圆 $C_3:x^2+(y-\sqrt{3})^2=1$. 直线 $l:y=kx+b$ 与 C_1,C_2,C_3 均有两个交点. 记 l 被 C_1,C_2,C_3 截得弦长为 s_1,s_2,s_3，则（　　）

A. k 可以取任意实数

B. 满足 $s_1=s_2=s_3$ 的直线 l 共有 3 条

C. 满足 $s_1+s_2+s_3=3$ 的直线 l 多于 3 条

D. 当 $b=0$ 时，$s_1+s_2+s_3$ 的最大值为 $\dfrac{2\sqrt{21}}{3}$

【答案】BCD

【解析】方法一：设 $q=\sqrt{1+k^2}$，圆心到直线 l 的有向距离分别为 $d_1=\dfrac{b-k}{q}$，$d_2=\dfrac{b+k}{q}$，$d_3=\dfrac{b-\sqrt{3}}{q}$，所以 $s_i=2\sqrt{1-d_i^2}$，且必须有 $|d_i|<1$.

A. 若 $k=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，则 $q=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. 由 $|b-k|<q$ 得 $b<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，由 $|b-\sqrt{3}|<q$ 得 $b>\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，矛盾，故 A 错.

B. 由 $s_1=s_2=s_3$ 得 $|b-k|=|b+k|=|b-\sqrt{3}|$. 先由 $|b-k|=|b+k|$ 得 $b=0$ 或 $k=0$. 若 $k=0$，则 $b=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$；若 $b=0$，则 $k=\pm\sqrt{3}$. 三条直线都满足割线条件，故 B 正确.

C. 取 $b=0$，记 $u=\dfrac{1}{\sqrt{1+k^2}}$，则 $s_1+s_2+s_3=4u+2\sqrt{1-3u^2}$. 令其等于 3，得 $4u+2\sqrt{1-3u^2}=3$，平方得 $28u^2-24u+5=0$，解得 $u=\dfrac{1}{2}$ 或 $u=\dfrac{5}{14}$，

对应 $k=\pm\sqrt{3}$ 或 $k=\pm\dfrac{\sqrt{171}}{5}$，已有 4 条直线，故 C 正确.

A. 当 $b=0$ 时，仍有 $S=S_1+s_2+s_3=4u+2\sqrt{1-3u^2}$，$0<u<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. 令 $v=\sqrt{1-3u^2}$，则 $3u^2+v^2=1$. 由柯西不等式，$S^2\leqslant\left(\dfrac{16}{3}+4\right)(3u^2+v^2)=\dfrac{28}{3}$，当 $u=\dfrac{2}{\sqrt{21}}$ 时取等，

公众号 数学文化坊

所以 $S_{\max}=\frac{2\sqrt{21}}{3}$，$D$ 正确. 故选 BCD.

方法二: 把三个圆心记为 O_1, O_2, O_3，它们是边长为 2 的正三角形. 直线能同时割三圆，等价于三个圆心在法向上的投影能放进长度为 2 的开区间. 若法向平行 O_1O_3，对应 $k=-\frac{1}{\sqrt{3}}$，投影宽度正好是 2，开区间无法盖住，A 错.

弦长只由圆心到直线的距离决定. 三弦相等时，直线到三个顶点距离相等；这样的直线正好是与三边分别平行、并平分对应顶点到对边距离的 3 条，

即 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$、$y=\sqrt{3}x$、$y=-\sqrt{3}x$， B 正确.

再看过原点的直线. 设 $t=|\cos\theta|$，则 $s_1=s_2=2t$，$s_3=2\sqrt{1-3t^2}$，于是 $S=4t+2\sqrt{1-3t^2}$. 令 $S=3$，同样得 $t=\frac{1}{2}$ 或 $t=\frac{5}{14}$，

对应四条过原点的直线，故 C 正确.

令 $u=\sqrt{3}t, v=\sqrt{1-3t^2}$，则 $u^2+v^2=1$.

而 $S=\frac{4}{\sqrt{3}}u+2v\leqslant\sqrt{\frac{16}{3}+4}=\frac{2\sqrt{21}}{3}$，

等号在 $t=\frac{2}{\sqrt{21}}$ 时可取，D 正确，故选 BCD.

三、填空题: 本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12 双曲线 $5x^2-6y^2=1$ 的离心率为 _____.

【答案】 $\frac{\sqrt{66}}{6}$

【解析】由 $5x^2-6y^2=1$，得 $a^2=\frac{1}{5}$，$b^2=\frac{1}{6}$，所以 $c^2=a^2+b^2=\frac{11}{30}$，$e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{11}{6}$，故 $e=\frac{\sqrt{66}}{6}$，应填: $\frac{\sqrt{66}}{6}$.

13 已知 $f(x)=2\sin(ax+\theta)(a\in Z, 0\leqslant\theta<2\pi)$ 是偶函数，$f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 单调递增。则 $\theta=$ _____，$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=$ _____。

【答案】 $\frac{3\pi}{2}$；1

【解析】若 $a=0$，则 $f(x)$ 为常函数，不合题意。若 $a\neq0$，由 $f(-x)=f(x)$，得 $\sin(\theta-ax)=\sin(\theta+ax)$，所以 $2\cos\theta\sin(ax)=0$，从而 $\cos\theta=0$。

又 $0\leqslant\theta<2\pi$，故 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 或 $\theta=\frac{3\pi}{2}$。

公众号 · 数学文化坊

当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)=2\cos ax$，不合单调递增；

当 $\theta=\frac{3\pi}{2}$ 时，$f(x)=-2\cos ax$。

此时 $f'(x)=2a\sin ax$，要在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内恒为正，需 $|a|=1$ 或 $|a|=2$。

于是 $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-2\cos\frac{2\pi a}{3}=1$，应填：$\frac{3\pi}{2}$；1.

14 设实数 q 满足：存在数列 $\{a_n\}$，使得对于任意 $n\in N^*$，均有 $a_1+a_2+\cdots+a_{3n}=n^2+n$，且 $\{a_n\}$ 中有某连续 9 项 $a_k, a_{k+1}, \cdots, a_{k+8}$ 是公比为 q 的等比数列. 则 q 的最大值为 .

【答案】$\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$

【解析】

方法一：令 $T_n=a_{3n-2}+a_{3n-1}+a_{3n}$，由题意得 $T_n=(n^2+n)-[(n-1)^2+(n-1)]=2n$，因此每个三项块 B_n 的和为 $2n$.

设这 9 项为 $x, xq, xq^2, \cdots, xq^8$，记 $C=1+q+q^2$.

由于 $C>0$，且完整三项块和均为正，下面按 k 除以 3 的余数讨论.

1、若 $k=3m+1(m\geqslant 0)$，这 9 项正好包含三个完整三项块，

得 $xC=2(m+1)$，$xq^3C=2(m+2)$，$xq^6C=2(m+3)$.

于是 $q^3=\frac{m+2}{m+1}$ 且 $q^3=\frac{m+3}{m+2}$，矛盾，故这种起点不存在.

2、若 $k=3m+2(m\geqslant 0)$，其中两个完整三项块为第 $m+2$、$m+3$ 块，

得 $xq^2C=2(m+2)$ $xq^5C=2(m+3)$，所以 $q^3=\frac{m+3}{m+2}\leqslant\frac{3}{2}$.

3、若 $k=3m(m\geqslant 1)$，其中两个完整三项块为第 $m+1$、$m+2$ 块，

得 $xqC=2(m+1)$，$xq^4C=2(m+2)$，所以 $q^3=\frac{m+2}{m+1}\leqslant\frac{3}{2}$.

综上 $q^3\leqslant\frac{3}{2}$，所以 $q\leqslant\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$. 等号可以取到：取 $k=2$，$q=\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$，

令 $x=\frac{4}{q^2(1+q+q^2)}$，设 $a_{2+i}=xq^i(0\leqslant i\leqslant 8)$，则 $B_2=4$，$B_3=6$；再把 B_1, B_4 及其余三项块补足到规定的和 $2n$ 即可构成符合条件的数列. 应填：$\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$.

方法二：9 个连续位置至少含两个相邻完整三项块，它们在等比九项中相隔 3 项，所以相邻完整块和之比就是 q^3；

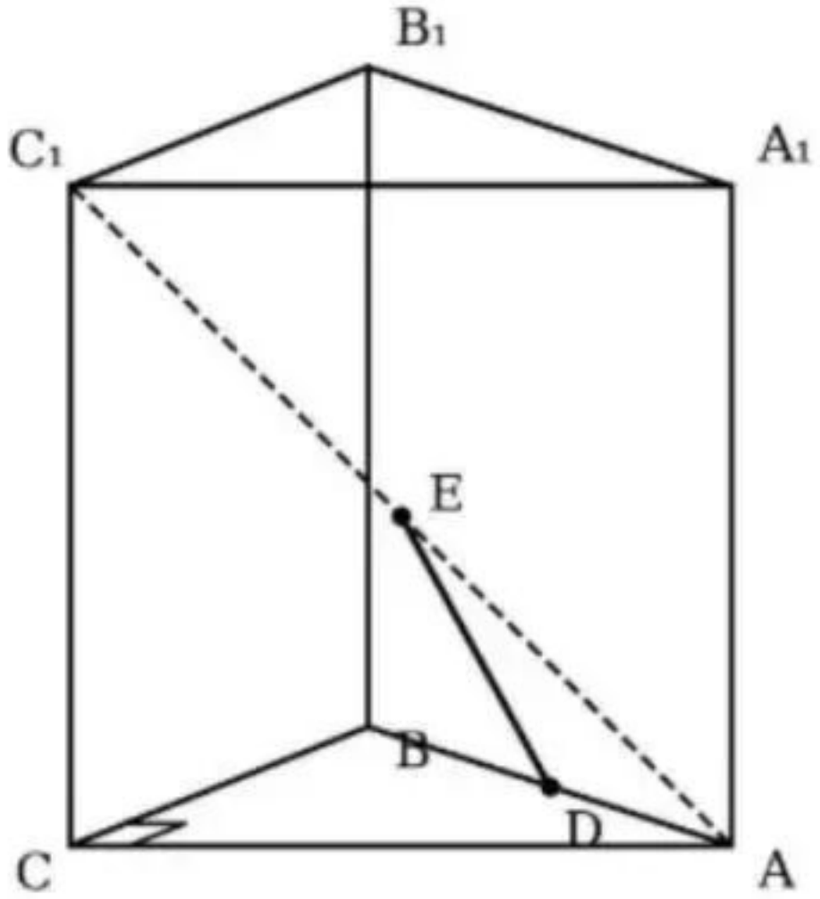
若含三个完整块，则 $2s$，$2(s+1)$，$2(s+2)$ 不成等比，排除；

公众号 · 数学文化坊

能放进窗口的最早相邻完整块是 B_2, B_3，和为 $4, 6$，故 $q^3 \leqslant \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$．第 2 到第 10 项成等比并令 $B_2 = 4, B_3 = 6$ 可取等，故最大值为 $\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}$．

四、解答题：本大题共 5 小题，共 77 分．解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤．

15 (13 分) 如图，在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中，$\angle ACB = 90^\circ$，$AC = BC$，D，E 分别为 AB，AC_1 的中点．



(1) 证明：$DE \parallel$ 平面 BCC_1B_1；

(2) 设 $CC_1 = 2$，直线 DE 与平面 ACC_1A_1 所成的角为 45°，求直线 DE 到平面 BCC_1B_1 的距离．

【解析】(1) 设 $AC = BC = a$，$CC_1 = h$，以 C 为原点，

分别以 CA, CB, CC_1 所在直线为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系．

则 $A(a,0,0)$，$B(0,a,0)$，$C_1(0,0,h)$．

因为 D, E 分别为 AB, AC_1 的中点，所以 $D\left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{a}{2}, 0\right)$，$E\left(\dfrac{a}{2}, 0, \dfrac{h}{2}\right)$，

从而 $\overrightarrow{DE} = \left(0, -\dfrac{a}{2}, \dfrac{h}{2}\right)$．

平面 BCC_1B_1 为 $x = 0$，直线 DE 的方向中 x 分量为 0，

且 D 不在该平面内，所以 $DE \parallel$ 平面 BCC_1B_1．

(2) 由 $CC_1 = 2$，得 $\overrightarrow{DE} = \left(0, -\dfrac{a}{2}, 1\right)$．

平面 ACC_1A_1 为 $y = 0$，其法线方向可取 $n = (0,1,0)$．

公众号 · 数学文化坊

设直线 DE 与平面 ACC_1A_1 所成的角为 θ，则 $\sin\theta=\dfrac{\frac{a}{2}}{\sqrt{\frac{a^2}{4}+1}}$.

由 $\theta=45^\circ$，得 $\dfrac{\frac{a}{2}}{\sqrt{\frac{a^2}{4}+1}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，解得 $a=2$.

因为直线 DE 平行于平面 BCC_1B_1，所以所求距离为 $\dfrac{a}{2}=1$.

16 (15 分) 已知在 $\triangle ABC$ 中，$AB=3$，$BC=2\sqrt{3}$，$\cos B=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

(1) 求 $\cos A$；

(2) 设 D，E 两点满足：D 在 BA 的延长线上，$DE\parallel BC$，$AE\perp AC$. 若 $DE=\sqrt{6}$，求 CE.

【解析】(1) 由余弦定理，

$AC^2=AB^2+BC^2-22AB\cdot BC\cdot\cos B=9+12-12=9$，

所以 $AC=3$，从而 $AB=AC=3$.

因此 $\cos A=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2?AB\cdot AC}=\dfrac{9+9-12}{18}=\dfrac{1}{3}$.

(2) 以 A 为原点，AC 所在直线为 x 轴，过 A 且垂直于 AC 的直线为 y 轴.

由 (1) 知 $C(3,0)$，又 $B(3\cos A,3\sin A)=B(1,2\sqrt{2})$.

设 $D=A+t(A-B)$，$t>0$，则 $D(-t,-2\sqrt{2}t)$.

设 $E=D+\lambda(C-B)$. 因为 $DE\parallel BC$ 且 D 在 BA 的延长线上，所以 $\lambda>0$.

由 $DE=\sqrt{6}$，$BC=2\sqrt{3}$，得 $\lambda=\dfrac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

又 $AE\perp AC$，所以点 E 的横坐标为 0，即 $-t+2\lambda=0$，得 $t=2\lambda=\sqrt{2}$.

于是 $E=(0,-2\sqrt{2}t-2\sqrt{2}\lambda)=(0,-6)$，

所以 $CE=\sqrt{3^2+6^2}=3\sqrt{5}$.

17 (15 分) 设整数 $N\geqslant 2$，某同学用一个球进行投篮练习，至多投篮 N 次，当且仅当投中 1 次时或 N 次均未投中时，停止练习. 设该同学每次投中的概率为 $p(0<p<1)$，各次投中与否相互独立，记 X 为停止练习时该同学的投篮次数.

(1) 当 $N=4$，$p=\dfrac{1}{3}$ 时，求 X 的分布列；

(2) 设 k，m 均为自然数.

(i) 当 $k\leqslant N-1$ 时，求 $P(X>k)$；

(ii) 当 $k+m\leqslant N-1$ 时，证明：$P(X>k+m\mid X>k)=P(X>m)$.

公众号·数学文化坊

【解析】

(1) 令 $q=1-p=\frac{2}{3}$. 当 i=1, 2, 3 时, $P(X=\mathrm{i})=q^{i-1}p$;

而 $P(X=4)=q^3p+q^4=q^3=\frac{8}{27}$.

所以 X 的分布列为:

X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{3}$	29	$\frac{4}{27}$	$\frac{8}{27}$

(2) 记 $q=1-p$.

(i) 当 $k\leqslant N-1$ 时, 事件 $P(X>k)$ 表示前 k 次都未投中, 所以 $P(X>k)=q^k$ $=(1-p)^k$.

(*ii*) 由 $k+m\leqslant N-1$, 得 $m\leqslant N-1$. 因此

$$P(X>k+m\mid X>k)=\frac{P(X>k+m)}{P(X>k)}=\frac{q^{k+m}}{q^k}=q^m.$$

又由 (i) 知 $P(X>m)=q^m$, 所以 $P(X>k+m\mid X>k)=P(X>m)$.

18 (17 分) 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点为 $F(-1,0)$, 离心率为 $\frac{1}{2}$.

(1) 求 C 的方程;

(2) 设 O 为坐标原点, 过 F 且斜率大于 0 的动直线 l 与 C 交于 P, Q 两点, 其中 Q 在第三象限, 直线 PO 与 C 的另一个交点为 R .

(i) 若 $\triangle PQR$ 的面积是 $\triangle PFO$ 的面积的 3 倍, 求 l 的方程;

(*ii*) 求 $\tan\angle PQR$ 的最小值.

【解析】(1) 求椭圆方程。椭圆左焦点为 $F(-1,0)$, 故 $c=1$ 。

离心率为 $\mathrm{e}=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$ 所以 $a=2$ 。又 $b^2=a^2-c^2=4-1=3$.

因此 $\left[\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\right]$

(2) 设直线 l 的斜率为 $t>0$ 。直线过 $F(-1,0)$, 故

$l:y=t(x+1)$.代入椭圆得 $\frac{x^2}{4}+\frac{t^2(x+1)^2}{3}=1$,

即 $(3+4t^2)x^2+8t^2x+4t^2-12=0$.

设上方交点为 P, 第三象限交点为 Q, 则

公众号 · 数学文化坊

$$x_P=\frac{2\left(-2t^2+3\sqrt{t^2+1}\right)}{4t^2+3},\quad x_Q=\frac{2\left(-2t^2-3\sqrt{t^2+1}\right)}{4t^2+3}.$$

由于椭圆关于原点对称，直线 PO 与椭圆的另一交点为 $R=-P$.

(i) 求 l。P,Q,F 共线，且 $R=-P$。

点 O 到直线 l 的距离为 $\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$ 点 R 到直线 l 的距离为其 2 倍。

因此 $\frac{S_{\triangle PQR}}{S_{\triangle PFO}}=2\cdot\frac{PQ}{PF}$.

题设该比值为 3，故 $\frac{PQ}{PF}=\frac{3}{2}$，$PF=2FQ$.

用横坐标差表示同一直线上的长度，得 $x_P+1=2(-1-x_Q)$.

代入上式化简：$2\sqrt{t^2+1}=3$ 故 $t=\frac{\sqrt{5}}{2}$ 所以 $l:y=\frac{\sqrt{5}}{2}(x+1)$

(*ii*) 求 $\tan\angle PQR$ 的最小值。

由计算可得直线 QR 的斜率为 $k_{QR}=-\frac{3}{4t}$

直线 QP 的斜率为 t。两直线夹角的正切为

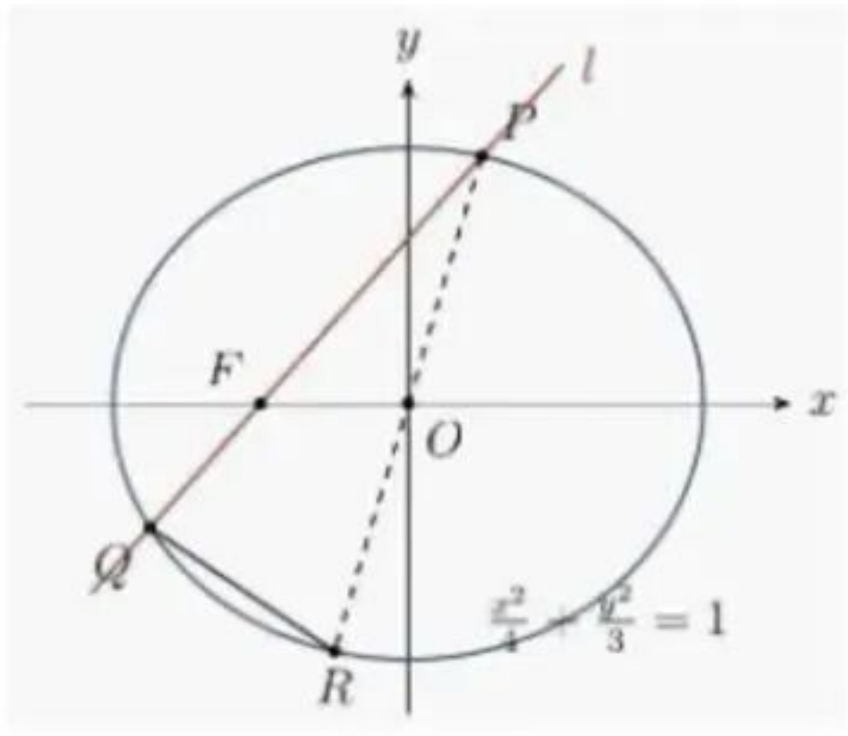
$$\tan\angle PQR=\left|\frac{k_{QR}-t}{1+tk_{QR}}\right|=\left|\frac{-\frac{3}{4t}-t}{1-\frac{3}{4}}\right|=4t+\frac{3}{t}.$$

由基本不等式，

$$4t+\frac{3}{t}\geqslant 2\sqrt{12}=4\sqrt{3}$$

当 $t=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时取等号。

因此 $\tan\angle PQR_{\min}=4\sqrt{3}$.



公众号 · 数学文化坊

19 (17 分) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 R，且当 $x<0$ 时，$f(x)=2^x$. 对任意 $x_0\in R$，定义集合 $D(x_0)=\{d\in R\mid f(x_0+d)>f(x_0)\}$.

(1) 若当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=1-x$，求 $D(-1)$；

(2) 若 $f(x)$ 是奇函数，$f(x_1)\leqslant f(x_2)$，且 $x_1x_2\neq 0$，证明：$D(x_2)\subseteq D(x_1)$；

(3) 设 $f(x)$ 满足：①若 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，则 $D(x_2)\subseteq D(x_1)$；②当 $0<x<1$ 时，$f(x)<f(0)$.

(i) 证明：$f(0)\geqslant 1$；

(*ii*) 证明：$f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 单调递增.

【解析】(1) 求 $D(-1)$。此时 $f(-1)=2^{-1}=\dfrac{1}{2}$.

令 $x=-1+d$。当 $d<1$ 时，$x<0$，

$f(-1+d)=2^{-1+d}>\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow d>0$.得 $0<d<1$。

当 $d\geqslant 1$ 时，$x\geqslant 0$，由题设 $f(x)=1-x$，

$f(-1+d)=1-(-1+d)=2-d>\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow d<\dfrac{3}{2}$.得 $1\leqslant d<\dfrac{3}{2}$。

综上 $D(-1)=\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$

(2) 奇函数情形。若 f 为奇函数，则

$$f(x)=\begin{cases}2^x, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ -2^{-x}, & x>0.\end{cases}$$

于是 $D(x)=\begin{cases}(0,-x), & x<0,\\ (-\infty,-x]\cup(0,+\infty), & x>0.\end{cases}$

由 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$ 且 $x_1x_2\neq 0$ 分类讨论：

若 $x_1,x_2<0$，则 $x_1\leqslant x_2<0$，故 $(0,-x_2)\subseteq(0,-x_1)$；

若 $x_1,x_2>0$，则 $0<x_1\leqslant x_2$，故 $(-\infty,-x_2]\subseteq(-\infty,-x_1]$；

若 $x_1>0,x_2<0$，则 $D(x_2)=(0,-x_2)\subset(0,+\infty)\subset D(x_1)$。

均有 $D(x_2)\subseteq D(x_1)$.

(3) (i) 证明 $f(0)\geqslant 1$。反设 $f(0)<1$。

由于 $2^x\to 1(x\to 0^-)$，可取 $x_0<0$ 充分接近 0，

使 $f(0)<2^{x_0}=f(x_0)<1$.

由条件 (1)，$f(0)<f(x_0)$ 推出 $D(x_0)\subseteq D(0)$.

取 $d=-\dfrac{x_0}{2}>0$ 因 $x_0+d=\dfrac{x_0}{2}<0$，且 $f(x_0+d)=2^{x_0/2}>2^{x_0}=f(x_0)$，

公众号 · 数学文化坊

所以 $d\in D(x_0)$。又可令 x_0 足够接近 0,使 $0<d<1$;

由条件 (2), $f(d)<f(0)$,

即 $d\notin D(0)$,与 $D(x_0)\subseteq D(0)$ 矛盾。故 $f(0)\geqslant 1$

(3) (*ii*) 证明 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增。先给出考试中常用的引理。

引理: 对任意 $a>0$, 若 $h>0$, 则 $h\in D(a)$,

即 $f(a+h)>f(a)$.

证明思路如下。由 (i) 得 $f(0)\geqslant 1$;

再由条件 (2) 和条件 (1) 可推出,对 $0<u<1$,必有 $f(u)\not> 2^{u-1}$.

否则由 $f(u)>f(u-1)$ 得 $D(u)\subseteq D(u-1)$,

而 $-u\in D(u)$ 却 $-u\notin D(u-1)$, 矛盾。

故 $f(u)\leqslant 2^{u-1}<1\quad (0<u<1)$.　　(1)

对任意 $a>0, h>0$, 若 $h\notin D(a)$, 即 $f(a+h)\leqslant f(a)$,

由条件 (1) 得 $D(a)\subseteq D(a+h)$.

取足够小的 $u\in(0,1)$, 并把 $a, a+h$ 同时平移到以 u 和负数为端点的位置,

结合负半轴上 $f(x)=2^x$ 的严格递增性以及式 (1),

可构造出一个增量属于 $D(a)$ 而不属于 $D(a+h)$, 矛盾。

因此 $h\in D(a)$。于是对任意 $0<x_1<x_2$, 令 $h=x_2-x_1>0$,

由引理 $h\in D(x_1)$,即 $f(x_2)=f(x_1+h)>f(x_1)$.

故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增。

公众号 · 数学文化坊